Chapitre 5

Fonctions convexes, Fonctions trigonométriques inverses, Fonctions hyperboliques

I-Fonctions convexes

Définition 9

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si et seulement si

$$\forall x_1 ; x_2 \in I \quad et \quad \forall \alpha \in [0;1] \quad on \ \ a :$$

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

Représentation graphique

Remarque 15

f est une fonction convexe si et seulement si $(-f)$ est concave.

5.1 Dérivabilité et convexité

Soit f une fonction dérivable sur I ;
f est une fonction convexe sur I si et seulement si $f^{''}(x) \geq 0$

Exemple 34

$f(x) = -\ln(x)$ est une fonction convexe sur $I =]0; +\infty[$ car :
$\forall x \in]0; +\infty[, \ f^{''}(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$

5.2 Tangente et convexité

La tangente en tout point d'une fonction convexe se situe en dessous de sa courbe représentative.

Remarque 16

La tangente en un point d'une fonction convexe est appelée droite d'appui

5.3 Point d'inflexion

Définition 10

Un point d'inflexion pour une fonction f est un point où la fonction change de convexité.
La notion de convexité est liée au signe de la dérivée seconde de la fonction.
Un point d'inflexion est un point en lequel la dérivée seconde change de signe.

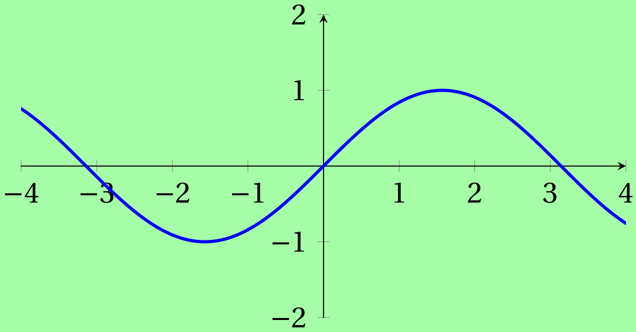
Représentation

II-Fonctions trigonométriques inverses- fonctions hyperboliques

5.4 La fonction $\sin(x)$

$\sin(x)$ est continue et croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Représentation



5.4.1 Domaine de la bijection réciproque

$\arcsin(x)$ est définie sur $[-1;1]$ (impaire sur $[-1;1]$)

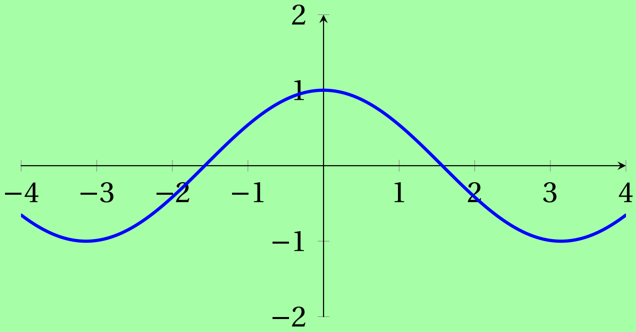
5.4.2 Dérivée de la fonction réciproque

$\arcsin(x)$ est dérivable sur $]-1;1[$ et $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5.5 La fonction $\cos(x)$

$\cos(x)$ est continue et croissante sur $[0;\pi]$

Représentation



5.5.1 Domaine de la bijection réciproque

$\arccos(x)$ est définie sur $[-1;1]$

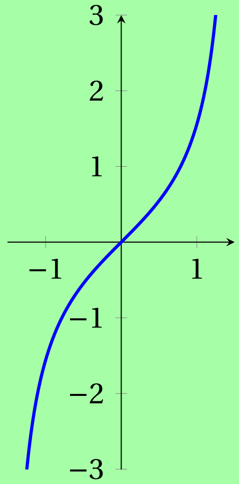
5.5.2 Dérivée de la fonction réciproque

$\arccos(x)$ est dérivable sur $]-1;1[$ et $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5.6 La fonction $\tan(x)$

$\tan(x)$ est continue et croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

Représentation



5.6.1 Domaine de la bijection réciproque

$\arctan(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ (impaire sur $\mathbb{R}$).

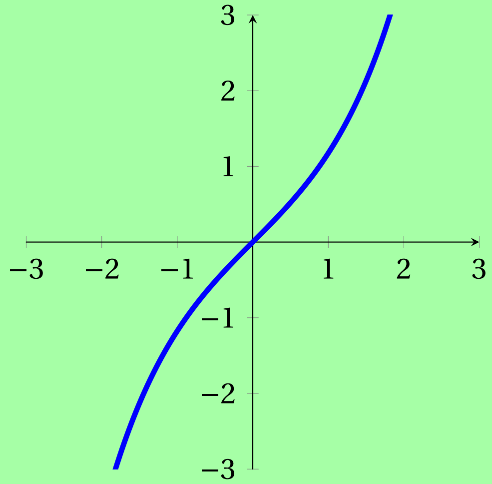
5.6.2 Dérivée de la fonction réciproque

arctan(x) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

5.7 La fonction $sh(x)$

$sh(x)$:sinus hyperbolique ; $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

Représentation



5.7.1 Domaine de la bijection réciproque

$argsh(x)$: argument sinus hyperbolique

$argsh(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ (impaire sur $\mathbb{R}$).

5.7.2 Expression de la réciproque

$argsh(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

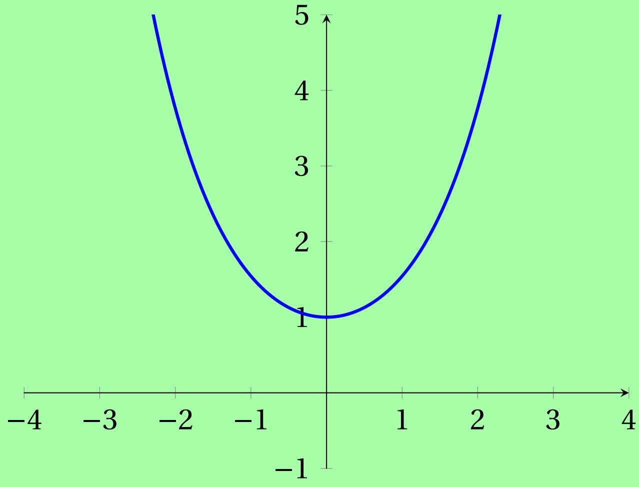
5.7.3 Dérivée de la fonction réciproque

$argsh(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $argsh'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

5.8 La fonction $ch(x)$

$ch(x)$:cosinus hyperbolique ; $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, définie sur $\mathbb{R}$ et paire.

Représentation



La fonction réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}_+$ vers $[1;+\infty[$.

5.8.1 Domaine de la bijection réciproque

$argch(x)$: argument cosinus hyperbolique
$argch(x)$ est définie sur $[1;+\infty[$.

5.8.2 Expression de la réciproque

$argch(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

5.8.3 Dérivée de la fonction réciproque

$argch(x)$ est dérivable sur $]1;+\infty[$ et $argch^{'}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

5.9 La fonction $th(x)$

$th(x)$: tangente hyperbolique ; $th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$, définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

5.9.1 Fonction argth : bijection réciproque

La fonction th réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}$ vers $]-1;1[$.
On appelle fonction argument tangente hyperbolique sa bijection réciproque notée argth.

5.9.2 Domaine de la bijection réciproque

$argth(x)$ est définie sur $]-1;1[$.

5.9.3 Expression de la réciproque

$$argth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

5.9.4 Dérivée de la fonction réciproque

$argth(x)$ est dérivable sur $]-1;1[$ et $argth^{'}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5.10 Propriétés des fonctions hyperboliques

$\text{ch}^{'}(x) = sh(x)$

$sh^{'}(x) = ch(x)$

$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

$th^{'}(x) = 1 - th^2(x) = \dfrac{1}{ch^2(x)}$